Algebry operatorów w przestrzeniach Hilberta
Lista 3 (wprowadzenie do teorii Tomity-Takesakiego)

Zad 1. Niech $p, q \in B(H)$ bedą rzutami (ortogonalnymi). Pokazać, że następujące warunki są równoważne

a) $p + q$ jest rzutem (ortogonalnym)

b) $pq = qp = 0$

c) $pH \perp qH$.

Zad 2. Niech $\mathcal{M} \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $x \in H$. Uzasadnić, że

a) x jest wektorem separującym dla $\mathcal{M} \Longleftrightarrow x$ jest wektorem cyklicznym dla $\mathcal{M}'$

b) x jest wektorem cyklicznym dla $\mathcal{M} \Longleftrightarrow x$ jest wektorem separujacym dla $\mathcal{M}'$

Zad 3. Zbadać problem istnienia wektorów cyklicznych i separujących dla algebr $\mathcal{M}$ z zadania 6 z poprzedniej listy. Które z tych algebr są w reprezentacji standardowej?

Zad 4. Niech $\mathcal{M} \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna w reprezentacji standardowej i niech $\Omega \in H$ będzie cyklicznym separatorem dla $\mathcal{M}$. Pokazać, że dla dowolnego wektora $x \in H$ przyporządkowanie

$$m\Omega \xrightarrow{T} mx, \qquad m \in \mathcal{M},$$

zadaje gęsto określony operator liniowy T, którego domknięcie (również oznaczane przez T) jest operatorem stowarzyszonym z $\mathcal{M}'$. W szczególności, jeśli $T \in B(H)$, to $T \in \mathcal{M}'$.

Zad 5. Omówić teorią Tomtiy na przykładzie W^*-algebr $L^\infty[0,1]$ oraz $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Algebry operatorów w przestrzeniach Hilberta
Lista 3 (wprowadzenie do teorii Tomity-Takesakiego)

Zad 6. Niech $p, q \in B(H)$ bedą rzutami (ortogonalnymi). Pokazać, że następujące warunki są równoważne

a) $p + q$ jest rzutem (ortogonalnym)

b) $pq = qp = 0$

c) $pH \perp qH$.

Zad 7. Niech $\mathcal{M} \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $x \in H$. Uzasadnić, że

a) x jest wektorem separującym dla $\mathcal{M} \Longleftrightarrow x$ jest wektorem cyklicznym dla $\mathcal{M}'$

b) x jest wektorem cyklicznym dla $\mathcal{M} \Longleftrightarrow x$ jest wektorem separujacym dla $\mathcal{M}'$

Zad 8. Zbadać problem istnienia wektorów cyklicznych i separujących dla algebr $\mathcal{M}$ z zadania 6 z poprzedniej listy. Które z tych algebr są w reprezentacji standardowej?

Zad 9. Niech $\mathcal{M} \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna w reprezentacji standardowej i niech $\Omega \in H$ będzie cyklicznym separatorem dla $\mathcal{M}$. Pokazać, że dla dowolnego wektora $x \in H$ przyporządkowanie

$$m\Omega \xrightarrow{T} mx, \qquad m \in \mathcal{M},$$

zadaje gęsto określony operator liniowy T, którego domknięcie (również oznaczane przez T) jest operatorem stowarzyszonym z $\mathcal{M}'$. W szczególności, jeśli $T \in B(H)$, to $T \in \mathcal{M}'$.